Міжнародний гуманітарний університет

ФАХОВИЙ КОЛЕДЖ

Циклова комісія зі спеціальності «Комп’ютерна інженерія»

Григор’єва Т. І.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Методичні рекомендації для самостійної роботи
здобувачів фахової передвищої освіти
за спеціальністю 123 «Комп’ютерна інженерія»

Одеса 2023

Затверджено Педагогічною радою Фахового коледжу Міжнародного гуманітарного університету (протокол №1 від 29 серпня 2023 року).

Григор'єва Т. І.

Теорія ймовірностей та математична статистика: методичні рекомендації для самостійної роботи здобувачів фахової передвищої освіти за спеціальністю 123 «Комп'ютерна інженерія» [Електронне видання]. / Григор'єва Т. І. Циклова комісія «Комп'ютерна інженерія» Фахового коледжу Міжнародного гуманітарного університету. Одеса, 2023. – 28 с.

Методичні рекомендації для курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика» призначені для самостійної роботи здобувачів фахової передвищої освіти за спеціальністю 123 «Комп'ютерна інженерія». Методичні рекомендації розроблені відповідно навчального плану. Матеріали складаються з навчальної програми курсу, методичних рекомендацій з проведення практичних занять і завдань для самостійної роботи здобувачів, списку рекомендованої літератури. Матеріали призначено для здобувачів Фахового коледжу Міжнародного гуманітарного університету.

1. ОПИС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

<table>
<tr><td rowspan="2">Найменування показників</td><td rowspan="2">Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень</td><td colspan="2">Характеристика навчальної дисципліни</td></tr>
<tr><td>денна форма навчання (на базі ПЗСО)</td><td>денна форма навчання (на базі БЗСО)</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Кількість кредитів – 4, загальна кількість годин – 120</td><td rowspan="5">Галузь 12 – Інформаційні технології
Спеціальність – 123 – «Комп’ютерна інженерія»</td><td colspan="2">обов’язкова</td></tr>
<tr><td colspan="2">Рік підготовки:</td></tr>
<tr><td>2-й</td><td>3-й</td></tr>
<tr><td colspan="2">Семестр</td></tr>
<tr><td>4-й</td><td>6-й</td></tr>
<tr><td rowspan="10">Мова навчання – українська</td><td rowspan="10">Рівень фахової передвищої освіти – Фаховий передвищій рівень</td><td colspan="2">Лекції</td></tr>
<tr><td>28 год.</td><td>28 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Практичні, семінарські</td></tr>
<tr><td>28 год.</td><td>28 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лабораторні</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота
та індивідуальні завдання</td></tr>
<tr><td>64 год.</td><td>64 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вид контролю:</td></tr>
<tr><td>екзамен</td><td>екзамен</td></tr>
</table>

Мета дисципліни – формування системи теоретичних знань і практичних навичок з основ ймовірнісно-статистичного апарату, вмінь працювати з основними ймовірнісними моделями, опанування основними методами математичної статистики.

Завдання – вивчення основних принципів та інструментарію ймовірнісно - статистичного апарату, опрацювання та застосування отриманих знань до прикладних задач, які потребують ймовірнісно-статистичного аналізу.

Ціль курсу: засвоєння основних методів теорії ймовірностей та математичної статистики та їх застосування при розв’язанні практичних задач.

Курс передбачає теоретичні та практичні заняття, самостійне навчання та індивідуальні завдання.

ЗАПЛАНОВАНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ
ЗА НАВЧАЛЬНОЮ ДИСЦИПЛІНОЮ

Знання:

Випадкові події. Класичне, геометричне та статистичне визначення ймовірності. Безпосереднє знаходження ймовірності. Теореми додавання та множення ймовірностей. Формула повної ймовірності. Повторення випробувань. Одновимірні випадкові величини, їх числові характеристики та закони розподілу. Двовимірні випадкові величини, їх числові характеристики та закони розподілу. Базові поняття математичної статистики; методи опрацювання емпіричних даних, одержання точкових та інтервальних статистичних оцінок невідомих параметрів, перевірки статистичних гіпотез на основі вибіркових даних.

Уміння:

Застосовувати теоретичний матеріал до розв'язування типових задач теорії ймовірностей та прикладних задач. Застосовувати теоретичний матеріал для розв'язування задач математичної статистики.

2. ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Тема 1. Випадкові події та їх класифікація

Класичне, геометричне та статистичне визначення ймовірності. Теореми додавання та множення ймовірностей

Тема 2. Формула повної ймовірності. Повторні незалежні випробування

Формула Байєса. Формула Бернуллі. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа. Теорема Пуассона

Тема 3. Випадкові величини

Закони розподілу та числові характеристики дискретної випадкової величини та неперервної випадкової величини

Тема 4. Системи випадкових величин

Числові характеристики двомірних випадкових величин. Дискретні випадкові вектори. Неперервні випадкові вектори

Тема 5. Функція випадкової величини

Числові характеристики функції випадкової величини. Функція двох випадкових аргументів

Тема 6. Основні задачі математичної статистики

Генеральна та вибіркова сукупність. Статистичний ряд розподілу та його числові характеристики. Статистичні оцінки параметрів розподілу. Перевірка статистичних гіпотез

3. СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин				
	Усього	у тому числі			
		Лекц.	Прак.	Лаб.	Сам. роб.
Тема 1. Теореми додавання та множення ймовірностей.	20	4	4	0	12
Тема 2. Формула повної ймовірності.	20	6	4	0	10
Тема 3. Випадкові величини.	20	4	6	0	10
Тема 4. Двовимірні неперервні випадкові величини.	20	6	4	0	10
Тема 5. Функції випадкової величини.	20	4	4	0	12
Тема 6. Основні задачі математичної статистики.	20	4	6	0	10
Всього	**120**	**28**	**28**	**0**	**64**
Підсумковий контроль – екзамен					

4. ПИТАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Тема 1. Комбінаторика. Випадкові події та їх класифікація. Безпосереднє знаходження ймовірностей. Протилежні події. Сумісні і несумісні події. Теореми додавання ймовірностей. Умовна ймовірність. Залежні та незалежні події. Теореми множення ймовірностей.

Тема 2. Формула гіпотез Байєса. Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа. Теорема Пуассона.

Тема 3. Одновимірні випадкові величини та способи їх завдання. Інтегральна функція розподілу ймовірностей та її властивості. Числові характеристики (математичне сподівання, дисперсія, середньоквадратичне відхилення) та їх властивості. Біноміальний закон розподілу. Пуассонівський закон розподілу. Рівномірний закон розподілу. Експоненціальний закон розподілу. Нормальний закон розподілу. Закон великих чисел.

Тема 4. Двовимірні випадкові величини та способи їх завдання. Інтегральна функція розподілу. Числові характеристики. Коваріація двох випадкових величин. Властивості коваріації. Коефіцієнт кореляції. Визначення взаємозв'язку між різними параметрами системи.

Тема 5. Функція випадкової величини, основні поняття. Дискретні функції одного випадкового аргументу та способи їх завдання. Числові характеристики дискретної функції одного випадкового аргументу та її властивості. Неперервні функції одного випадкового аргументу та способи їх завдання. Числові характеристики неперервної функції одного випадкового аргументу та її властивості.

Тема 6. Основні задачі математичної статистики. Генеральна та вибіркова сукупність. Статистичний ряд розподілу. Емпірична функція розподілу. Побудова полігону частот і полігона відносних частот. Гістограма частот і гістограма відносних частот. Числові характеристики вибіркового розподілу. Статистичні оцінки параметрів розподілу. Інтервальні оцінки. Побудова довірчих інтервалів. Перевірка статистичних гіпотез. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл за допомогою Excel. Критерій Пірсона.

5. САМОСТІЙНА РОБОТА

До самостійної роботи студентів щодо вивчення дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» включаються:

1. Знайомство з науковою та навчальною літературою відповідно зазначених у програмі тем.
2. Опрацювання лекційного матеріалу.
3. Підготовка до практичних занять.
4. Консультації з викладачем протягом семестру.

5. Самостійне опрацювання окремих питань навчальної дисципліни.
6. Підготовка до підсумкового контролю.

Тематика та питання до самостійної підготовки та індивідуальних завдань

Тема 1. Комбінаторика. Випадкові події та їх класифікація. Класичне, геометричне та статистичне визначення ймовірності. Протилежні події. Ймовірність протилежної події. Сумісні і несумісні події. Теореми додавання ймовірностей. Умовна ймовірність. Залежні та незалежні події. Теореми множення ймовірностей. Теореми додавання ймовірностей для сумісних і залежних подій. Задачі та проблеми у галузі телекомунікацій та радіотехніки.

Тема 2. Формула повної ймовірності. Формули Байєса. Повторні незалежні випробування. Формули Бернуллі, Пуассона, Лапласа. Найімовірніше число настання події під час повторних випробувань. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа. Методи, способи та засоби отримання, передавання, обробки та зберігання інформації.

Тема 3. Випадкові величини. Закони розподілу та числові характеристики дискретної випадкової величини та неперервної випадкової величини. Властивості математичного сподівання. Моменти. Дисперсія. Властивості дисперсії. Параметри нормального розподілу. Правило трьох сигм. Комп'ютерне моделювання пристроїв, систем і процесів з використанням універсальних пакетів прикладних програм.

Тема 4. Двовимірні неперервні випадкові величини та способи їх завдання. Інтегральна і диференціальна функції розподілу та їх властивості. Числові характеристики та їх властивості. Початковий та центральний теоретичні моменти. Кореляційний момент та коефіцієнт кореляції та їх властивості. Проектування, моделювання, випробовування та адміністрування комп’ютерної мережі.

Тема 5. Функції випадкової величини. Функція дискретного випадкового аргументу, числові характеристики. Функція неперервного випадкового аргументу. Числові характеристики функції випадкового аргументу. Випадкові процеси. Числові характеристики випадкового процесу. Кореляційна функція випадкового процесу. Методи та інструментальні засоби вимірювання параметрів та робочих характеристик телекомунікаційних систем, інфокомунікаційних, телекомунікаційних мереж, радіотехнічних систем та систем телевізійного й радіомовлення та їх елементів.

Тема 6. Основні задачі математичної статистики. Генеральна та вибіркова сукупність. Статистичний ряд розподілу та його числові характеристики. Показники варіації статистичного ряду. Статистичні оцінки параметрів розподілу. Перевірка статистичних гіпотез.

Теми доповідей

1. Основні поняття та властивості скінченних ймовірнісних просторів. Дослідження основних визначень, таких як елементарні події, події, ймовірність події, та їх властивостей у контексті скінченних просторів.
2. Розподіл Бернуллі та його застосування. Аналіз розподілу Бернуллі, який є основою для вивчення скінченних ймовірнісних просторів, та його застосування у моделюванні різних випадкових подій.
3. Застосування скінченних ймовірнісних просторів в теорії ігор: Аналіз і застосування скінченних ймовірнісних просторів у теорії ігор, включаючи стратегії, рішення та оптимальні вибори у різних ігрових ситуаціях.
4. Математичне доведення закону великих чисел. Аналіз різних математичних доказів цього закону, включаючи класичний закон великих чисел та його варіації, такі як закон Маркова чи закон Чебишова.
5. Застосування закону великих чисел в статистичних обчисленнях: Вивчення ролі цього закону у статистичних обчисленнях, таких як обчислення середнього значення або дисперсії у великих вибірках даних.
6. Емпіричне підтвердження закону великих чисел. Дослідження експериментальних результатів, які підтверджують дію закону великих чисел у реальних ситуаціях.
7. Приклади застосування в різних галузях. Розгляд прикладів застосування закону великих чисел у фізиці, економіці, біології, фінансах та інших галузях.

8. Застосування в обробці сигналів та обробці даних. Аналіз використання закону великих чисел у сучасних системах обробки сигналів та обробки даних, таких як машинне навчання та штучний інтелект.
9. Статистична теорія великих вибірок. Вивчення основних концепцій та методів статистичного аналізу, що базуються на дії закону великих чисел у великих вибірках даних.
10. Вибірка та методи збору даних. Дослідження різних методів вибіркових досліджень та їх вплив на отримані результати. Аналіз методів збору даних та їх відповідність конкретним вимогам дослідження.
11. Аналіз та інтерпретація статистичних даних. Вивчення різних методів аналізу та інтерпретації статистичних даних, включаючи побудову графіків, таблиць та інших візуалізацій.
12. Статистичні методи випробування гіпотез. Дослідження різних статистичних методів для перевірки гіпотез про параметри розподілу даних, включаючи методи рівня значущості та критерії збігу.
13. Статистичні моделі та прогнозування. Вивчення різних статистичних моделей для аналізу та прогнозування даних, включаючи лінійну та нелінійну регресію, часові ряди та інші методи.
14. Статистичне моделювання та симуляція. Дослідження різних методів статистичного моделювання та симуляції даних для вивчення їх властивостей та впливу на різні аспекти дослідження.
15. Статистичні методи у прикладних науках. Аналіз застосування статистичних методів у різних наукових галузях, таких як медицина, економіка, соціологія та інші.
16. Основні розподіли математичної статистики. Нормальний розподіл. Розподіл χ^2. Розподіл Стьюдента. F-розподіл (розподіл Фішера).
17. Методи збору соціальної інформації. Вибірка, аналіз документів, спостереження, опитування, анкетування, інтерв’ю.

6. ВИДИ ТА МЕТОДИ КОНТРОЛЮ

Види контролю	Складові оцінювання
поточний контроль, який здійснюється у ході: проведення практичних занять, виконання індивідуального завдання; проведення консультацій та відпрацювань.	**50%**
підсумковий контроль, який здійснюється у ході проведення екзамену.	**50%**

Методи діагностики знань (контролю)	фронтальне опитування; доповідь, усне повідомлення, індивідуальне опитування; робота на практичних заняттях, екзамен.

7. Питання до екзамену

1. Елементи комбінаторики
2. Статистичне означення ймовірності. Геометричне означення ймовірності. Класичне означення ймовірності
3. Сумісні і несумісні події. Теореми додавання ймовірностей
4. Умовна ймовірність. Залежні та незалежні події
5. Теореми множення ймовірностей
6. Теореми додавання ймовірностей для сумісних і залежних подій
7. Протилежні події. Ймовірність протилежної події
8. Формула повної ймовірності
9. Формула гіпотез Байєса
10. Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі
11. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа. Теорема Пуассона
12. Випадкові величини. Закони розподілу та числові характеристики дискретної випадкової величини та неперервної випадкової величини
13. Властивості математичного сподівання. Моменти. Дисперсія. Властивості дисперсії
14. Біномінальний розподіл. Розподіл Пуассона. Рівномірний закон.
15. Нормальний розподіл. Показниковий розподіл
16. Параметри нормального розподілу. Правило трьох сигм
17. Закон великих чисел
18. Системи випадкових величин. Числові характеристики двомірних випадкових величин. Дискретні випадкові вектори. Неперервні випадкові вектори
19. Коваріація двох випадкових величин. Властивості коваріації. Коефіцієнт кореляції
20. Числові характеристики випадкових векторів
21. Функція випадкової величини. Числові характеристики
22. Функція двох випадкових аргументів

23. Основні задачі математичної статистики. Генеральна та вибіркова сукупність. Статистичний ряд розподілу
24. Емпірична функція розподілу. Побудова полігону частот і полігона відносних частот. Гістограма частот і гістограма відносних частот.
25. Числові характеристики вибіркового розподілу
26. Статистичні оцінки параметрів розподілу
27. Інтервальні оцінки. Побудова довірчих інтервалів
28. Перевірка статистичних гіпотез. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл за критерієм Пірсона

8. КРИТЕРІЇ ПІДСУМКОВОЇ ОЦІНКИ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ

Рівень знань оцінюється:

- «відмінно» / «зараховано» А - від 90 до 100 балів. Студент виявляє особливі творчі здібності, вміє самостійно знаходити та опрацьовувати необхідну інформацію, демонструє знання матеріалу, проводить узагальнення і висновки. Був присутній на лекціях та семінарських заняттях, під час яких давав вичерпні, обґрунтовані, теоретично і практично правильні відповіді, має конспект з виконаними завданнями до самостійної роботи, проявляє активність і творчість у науково-дослідній роботі;

- «добре» / «зараховано» В - від 82 до 89 балів. Студент володіє знаннями матеріалу, але допускає незначні помилки у формуванні термінів, категорій, проте за допомогою викладача швидко орієнтується і знаходить правильні відповіді. Був присутній на лекціях та семінарських заняттях, має конспект з виконаними завданнями до самостійної роботи, проявляє активність і творчість у науково-дослідній роботі;

- «добре» / «зараховано» С - від 74 до 81 балів. Студент відтворює значну частину теоретичного матеріалу, виявляє знання і розуміння основних положень, з допомогою викладача може аналізувати навчальний матеріал, але дає недостатньо обґрунтовані, невичерпні відповіді, допускає помилки. При цьому враховується наявність конспекту з виконаними завданнями до самостійної роботи та активність у науково-дослідній роботі;

- «задовільно» / «зараховано» D - від 64 до 73 балів. Студент був присутній не на всіх лекціях та семінарських заняттях, володіє навчальним матеріалом на середньому рівні, допускає помилки, серед яких є значна кількість суттєвих. При цьому враховується наявність конспекту з виконаними завданнями до самостійної роботи;

- «задовільно» / «зараховано» Е - від 60 до 63 балів. Студент був присутній не на всіх лекціях та семінарських заняттях, володіє навчальним матеріалом на рівні, вищому за початковий, значну частину його відтворює на репродуктивному рівні, на всі запитання дає необґрунтовані, невичерпні відповіді, допускає помилки, має неповний конспект з завданнями до самостійної роботи.

- «незадовільно з можливістю повторного складання» / «не зараховано» FX – від 35 до 59 балів. Студент володіє матеріалом на рівні окремих фрагментів, що становлять незначну частину навчального матеріалу.

- «незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни» / «не зараховано» F – від 1 до 34 балів. Студент не володіє навчальним матеріалом.

Таблиця відповідності результатів контролю знань за різними шкалами

100-бальною шкалою	**Шкала за ECTS**	**За національною шкалою**	
		екзамен	**залік**
90-100 (10-12)	A	Відмінно	зараховано
82-89 (8-9)	B	Добре	
74-81(6-7)	C		
64-73 (5)	D	Задовільно	
60-63 (4)	E		
35-59 (3)	Fx	незадовільно	не зараховано
1-34 (2)	F		

9. ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ

№	поняття	формули
1	Разміщення	$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$
2	Перестановки	$P_m = m!$

3	Сполучення	$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$
4	Класичне означення ймовірності	$$P(A) = \frac{m}{n}$$ m – кількість наслідків, що сприяють події A, n – загальна кількість наслідків
5	Властивості ймовірності	$0 \le P(A) \le 1$ для будь-якої події $P(\Omega)=1$ для достовірної події $P(\varnothing)=0$ для неможливої події Ймовірність протилежної події $P(\overline{A})$ = 1- $P(A)$
6	Геометричне означення ймовірності	$$P(A) = \frac{m(A)}{m(G)},$$ де m – міра множини (довжина, площа, об'єм)
7	Сумісні і несумісні події	Дві події називаються несумісними, якщо вони не можуть відбутися одночасно. Якщо події А та В несумісні, то $A \cap B = 0$
8	Залежні і незалежні події	Дві події називаються незалежними. якщо ймовірність однієї з них не залежить від появи іншої. В іншому випадку події називаються залежними.
9	Теореми додавання ймовірностей для сумісних подій	$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$
10	Теореми додавання ймовірностей для несумісних подій	$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$
11	Умовна ймовірність	$$P_A(B) = P(B/A)$$ - ймовірність події В за умови, що подія А вже настала

		Для незалежних подій $P_A(B) = P(B)$
12	Теореми множення ймовірностей для залежних подій	$P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$
13	Теореми множення ймовірностей для незалежних подій	$P(AB) = P(A)P(B)$
14	Формула повної ймовірності	Нехай подія А може статися разом з однією з попарно несумісних подій $H_1, H_2, \ldots, H_n$, які утворюють повну групу (гіпотези). Тоді $P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)P_{H_k}(A)$
15	Формула гіпотез Байєса	$P_A(H_k) = \dfrac{P(H_k)P_{H_k}(A)}{P(A)}$
16	Формула Бернуллі	$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, $q = 1 - p$, $\quad C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.
17	Найбільш ймовірне число появи події А в n випробуваннях	$np - q \le k \le np + p$
18	Формула Пуассона	$P_n(m) \approx \dfrac{a^m e^{-a}}{m!}, \quad a = np$
19	Локальна теорема Муавра-Лапласа	$P_n(m) \approx \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$ $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ – функція Гауса.
20	Властивості функції Гауса	1. $\varphi(x)>0$ для всіх x; 2. функція $\varphi(x)$ - парна, $\varphi(-x) = \varphi(x)$; 3. $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$. Для $\lvert x \rvert \ge 4$ $\varphi(x) \approx 0$; 4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$.

21	Інтегральна теорема Муавра-Лапласа	$P(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)$ $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$ $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функція Лапласа $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - нормована функція Лапласа
22	Інтеграл Пуассона	$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$
23	Властивості функції Лапласа	1. $\Phi(-x) + \Phi(x) = 1$ 2. $\Phi(x) = 0{,}5 + \Phi_0(x)$ 3. функція $\Phi_0(x)$ - непарна, $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$ 4. Для $x \ge 4$ $\Phi(x) = 1$, $\Phi_0(x) = 0{,}5$
24	Дискретна випадкова величина	Закон розподілу <table><tr><td>X</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$\dots$</td><td>x_n</td></tr><tr><td>P</td><td>p_1</td><td>p_2</td><td>$\dots$</td><td>p_n</td></tr></table>$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ Інтегральная функція розподілу $F(x) = P(X < x)$ Математичне сподівання $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ Дисперсія $D(X) = M(X - M(X))^2$ $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$ Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ Ймовірність попадання випадкової величини в інтервал *(a;b)*

		$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$
25	Операції над дискретними випадковими величинами (д.в.в.)	Якщо д.в.в. X приймає значення x_i з ймовірностями p_i і д.в.в. Y приймає значення y_j з ймовірностями q_j ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$). 1. Сумой (різницею або добутком) д.в.в. X і д.в.в. Y називається д.в.в. $X + Y$ ($X - Y$ або $X \cdot Y$), що приймає значення $x_i + y_j$ ($x_i - y_j$ або $x_i \cdot y_j$) з ймовірностями $p_{ij} = p_i \cdot q_j$. 2. Добутком д.в.в. X на число c називається д.в.в. cX, що приймає значення $c \cdot x_i$ з ймовірностями p_i. 3. X^2 (X^k) приймає значення x_i^2 (x_i^k) з ймовірностями p_i.
26	Неперервна випадкова величина	Інтегральна функція розподілу $F(x) = P(X < x)$ $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$ Диференціальна функція розподілу (щільність розподілу ймовірностей) $$f(x) = F'(x)$$ Умови нормування $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ Математичне сподівання $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ Дисперсія $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(x))^2$ Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ Ймовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервал *(a;b)*

		$P(a<X<b)=F(b)-F(a)=\int\limits_a^b f(x)dx$
27	Властивості математичного сподівання **1.** $M(C)=C$ **2.** $M(C\cdot X)=C\cdot M(X)$ **3.** $M(X_1+X_2)=M(X_1)+M(X_2)$ **4.** Якщо X_1 та X_2 незалежні випадкові величини, то $M(X_1\cdot X_2)=M(X_1)\cdot M(X_2)$.	
28	Властивості дисперсії **1.**$D(X)\geq 0$. **2.**$D(C)=0$. **3.** $D(C\cdot X)=C^2\cdot D(X)$. **4.** Якщо X_1 та X_2 незалежні випадкові величини, то $D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)$	
29	Початковий момент порядка k ($k=0,1,2,...$)	$\alpha_k=M(X^k)$ Якщо X - д.в.в., то $\alpha_k=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i)^k p_i$ Якщо X - н.в.в., то $\alpha_k=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$
30	Центральний момент порядка k ($k=0,1,2,...$)	$\mu_k=M(X-M(X))^k$ $\mu_2=D(X),\quad \mu_1=M(x-M(X))=0$ Якщо X - д.в.в., то $\mu_k=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^k p_i$ Якщо X - н.в.в., то $\mu_k=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^k f(x)dx$

31	Коефіцієнт асиметрії	$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3(X)}$$
32	Коефіцієнт ексцесу	$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4(X)} - 3$$
33	Мода д.в.в. X	- найбільш ймовірне значення $M_0(X)$
34	Мода н.в.в. X з щільністю $f(x)$	- це таке її значення $M_0(X)$, при якому функція $f(x)$ досягає максимуму
35	Медіана в.в. X	- це таке її значення x_p, що $$P\{X < x_p\} = P\{X > x_p\} = \frac{1}{2}$$
36	Квантіль рівня в.в. X	- це таке число x_p, що $$P\{X < x_p\} = p$$ x_p є розв’язком рівняння $F(x_p) = p$
37	Біноміальний закон розподілу	$$P_n(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p$$ $$M(X) = np \qquad D(X) = npq \qquad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$ $$np - q \le k \le np + p$$
38	Розподіл Пуассона	$$P_n(X = m) = \frac{a^m e^{-a}}{m!}, \quad a = np$$ $$M(X) = D(X) = a$$ Для простійшого пуассоновського потоку: $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$, λ - інтенсивність потока
39	Рівномерний закон розподілу $X \sim R[a,b]$	$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

		$M(X)=\frac{a+b}{2}$ $D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$ $\sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$
40	Експоненціальний (показниковий) закон розподілу	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ ke^{-kx}, & x\ge 0\end{cases}$ $k>0$ $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-kx}, & x\ge 0\end{cases}$ $M(X)=\frac{1}{k}$ $D(X)=\frac{1}{k^2}$ $\sigma(X)=\frac{1}{k}$
41	Нормальний закон розподілу $X\sim N(m,\sigma)$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ m – математичне сподівання, σ - середнє квадратичне відхилення $P(\alpha<X<\beta)=\Phi(\frac{\beta-m}{\sigma})-\Phi(\frac{\alpha-m}{\sigma})$ $=\Phi_0(\frac{\beta-m}{\sigma})-\Phi_0(\frac{\alpha-m}{\sigma})$ $P(\lvert X-m\rvert<\varepsilon)=2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma})-1=2\Phi_0(\frac{\varepsilon}{\sigma})$ $F(x)=\Phi(\frac{x-m}{\sigma})$ $P(\lvert X-m\rvert<3\sigma)\approx 1$ (правило трьох сигм) $\boldsymbol{P(\lvert x-m\rvert<\sigma)=2\Phi(1)\approx}$ ***0,6837;*** $\boldsymbol{P(\lvert x-m\rvert<2\sigma)=2\Phi(2)\approx}$***0,9545;*** $\boldsymbol{P(\lvert x-m\rvert<3\sigma)=2\Phi(3)\approx}$***0,9973.***
42	Стандартний розподіл $X\sim N(0,1)$	- нормальний розподіл при $m=0,\ \sigma=1$ $f(x)=\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $F(x)=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

43	Системи випадкових величин	Упорядкований набір ($X_1, X_2, \dots, X_n$) випадкових величин
44	Закон розподілу дискретної двомірної випадкової величини (X, Y)	$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$ $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$
45	Закон розподілу кожної дискретної випадкової величини X і Y	$p_{x_i} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$ $\quad p_{y_j} = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$
46	Функція двох випадкових аргументів (X, Y)	$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\}$ $0 \le F(x, y) \le 1$
47	Функція розподілу дискретної двомірної випадкової величини (X, Y)	$F(x, y) = \sum_{x_i < x}\sum_{y_j < y} p_{ij}$
48	Щільність розподілу неперервної двомірної випадкової величини (X, Y)	$f(x, y) = F''_{xy}(x, y)$ $f(x, y) \ge 0$
49	Функция розподілу неперервної двомірної випадкової величини (X, Y)	$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)\,dudv$
	Функции розподілу кожної неперервної	$F_1(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v)\,dudv$

50	випадкової величини X і Y	$$F_2(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$$
	Щільності розподілу кожної неперервної випадкової величини X і Y	$$f_1(x)=F_1'(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$ $$f_2(y)=F_2'(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$
51	Умови нормування	$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$$
52	Ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в область D	$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)dxdy$$
53	Математичне сподівання двомірної випадкової величини (X,Y)	- сукупність двох математичних сподівань MX і MY. Для дискретної системи: $$MX=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij} \qquad MY=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij}.$$ Для неперервної системи: $$MX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x,y)dxdy \qquad MY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(x,y)dxdy.$$
	Дисперсія двомірної випадкової величини (X,Y)	- сукупність двох дисперсій DX і DY. Для дискретної системи випадкових величин:

54		$DX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - MX)^2 p_{ij}$ $DY = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_j - MY)^2 p_{ij}$. Для неперервної системи випадкових величин: $DX = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - MX)^2 f(x,y)dxdy$ $DY = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(y - MY)^2 f(x,y)dxdy$.
55	Початковий момент порядка $k+s$ системи (X,Y)	$\alpha_{k,s} = M(X^k Y^s)$ $\alpha_{1,0} = M(X^1 Y^0) = MX$ $\alpha_{0,1} = M(X^0 Y^1) = MY$
56	Центральний момент порядка $k+s$ системи (X,Y)	$\mu_{k,s} = M((X - MX)^k (Y - MY)^s)$ $\mu_{2,0} = DX$ $\mu_{0,2} = DY$
57	Коваріація двох випадкових величин	$K_{XY} = \text{cov}(X,Y) = M((X - MX)(Y - MY)) = \mu_{1,1}$ $K_{XY} = M(X \cdot Y) - MX \cdot MY$ $K_{XX} = DX$ $K_{YY} = DY$ Якщо (X,Y) - дискретна двомірна випадкова величина, то $K_{XY} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - MX)(y_j - MY)p_{ij}$. Якщо (X,Y) - неперервна двомірна випадкова величина, то $K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - MX)(y - MY) f(x,y)dxdy$ або $K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x,y)dxdy - MX \cdot MY$

58	Коефіцієнт кореляції двох випадкових величин X і Y	$$r_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}$$
59	Функція випадкової величини	$$Y=\varphi(X)$$
60	Якщо X - дискретна випадкова величина зі значеннями x_i ($i=\overline{1,n}$), ймовірності яких $p_i=P\{X=x_i\}$,	то випадкова величина $Y=\varphi(X)$ також дискретна зі значеннями $y_i=\varphi(x_i)$, ймовірності яких $$p_i=P\{Y=y_i\}=P\{X=x_i\}.$$ Математичне сподівання функції $Y=\varphi(X)$: $$MY=\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)p_i$$ Дисперсія функції $Y=\varphi(X)$: $$DY=\sum_{i=1}^{n}(\varphi(x_i)-MY)^2p_i$$
61	Якщо X - неперервна випадкова величина с щільністю розподілу $f(x)$,	то випадкова величина $Y=\varphi(X)$ також неперервна. Функція розподілу $Y=\varphi(X)$: $$G(y)=P\{Y<y\}=P\{X<\psi(y)\},$$ де $x=\psi(y)$ - обернена для функції $y=\varphi(x)$, $x\in(a,b)$. $$G(y)=\int_a^{\psi(y)}f(x)dx.$$ Щільність розподілу $Y=\varphi(X)$: $$g(y)=f(\psi(y))\cdot\left|\psi'(y)\right|.$$ Математичне сподівання функції $Y=\varphi(X)$:

		$$MY = M(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx.$$ Дисперсія функції $Y = \varphi(X)$: $$DY = D(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x) - MY)^2 f(x) dx.$$
62	Центральна гранична теорема	Якщо незалежні випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ однаково розподілені з математичним сподіванням m_x і дисперсією $D_x = \sigma^2$, то при $n \to \infty$ закон розподілу суми $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$ наближається до нормального $$f(x) = \frac{1}{\sigma_S \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_S)^2}{2\sigma_S^2}}$$ $$m_S = M(S) = \sum_{k=1}^{n} M(X_k) = n m_x$$ $$\sigma_S^2 = D(S) = \sum_{k=1}^{n} D(X_k) = n\sigma^2$$
63	Наслідок центральної граничної теореми	При достатньо великих n (вже при n>10) $$P\left(\alpha \le \sum_{k=1}^{n} X_k \le \beta\right) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{\beta - m_S}{\sigma_S}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_S}{\sigma_S}\right)\right)$$
64	Перша нерівність Чебишова	Якщо випадкова величина $X \ge 0$ має скінченне математичне сподівання MX, то для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ виконується нерівність: $$P\{X > \varepsilon\} \le \frac{MX}{\varepsilon}.$$ Для ймовірності протилежної події відповідна оцінка має вигляд: $$P\{x \le \varepsilon\} \ge 1 - \frac{MX}{\varepsilon}.$$

65	Друга нерівність Чебишова	Якщо випадкова величина X має скінченну дисперсію DX, то для будь якого числа $\varepsilon > 0$ виконується нерівність: $P\{\lvert X - MX\rvert > \varepsilon\} \le \frac{DX}{\varepsilon^2}$. Для ймовірної протилежної події відповідна оцінка має вигляд: $$P\{\lvert X - MX\rvert \le \varepsilon\} \ge 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Таблиця похідних

$(C)' = 0$	$(x)' = 1$	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(cosx)' = -\sin x$	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(arc\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}$
$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0, a \ne 1, x > 0$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Таблиця інтегралів

1	$\int du = u + C$	12	$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{u+a}{u-a}\right\rvert + C$
2	$\int u^a\, du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C, a \ne -1$	13	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$
3	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	14	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
4	$\int e^u\, du = e^u + C$	15	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert tg\frac{u}{2}\right\rvert + C$
5	$\int a^u\, du = \frac{a^u}{lna} + C, \alpha > 0, a \ne 1$	16	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$

6	$\int \sin u\, du = -\cos u + C$	17	$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{u} arctg \frac{u}{a} + C$
7	$\int \cos u\, du = \sin u + C$	18	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arsin \frac{u}{a} + C$
8	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$	19	$\int \operatorname{sh} u\, du = \operatorname{ch} u + C$
9	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$	20	$\int \operatorname{ch} u\, du = \operatorname{sh} u + C$
10	$\int tg\, u\, du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$	21	$\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = thu + C$
11	$\int ctg\, u\, du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$	22	$\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -cthu + C$

10. РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Стрелковська І.В. Теорія ймовірностей та випадкові процеси (для фахівців у галузі ІТ-технологій) / І.В. Стрелковська, В.М. Паскаленко. – Одеса: ОНАЗ, 2018. – 384 с.
2. Стрелковська І.В. Математична статистика / І.В. Стрелковська, В.М. Паскаленко. – Одеса: ОНАЗ, 2019. – 110 с.
3. Барковський В., Барковська Н., Лопатін О. Теорія ймовірностей та математична статистика. - Центр навч. Літ., 2019. – 424с.
4. Кармелюк Г.І. Теорія ймовірностей та математична статистика. - Центр навч. Літ., 2019. – 576с.
5. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб./ О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук, Б. П. Орел, П. І. Штабалюк. – К: НТУУ «КПІ», 2014. – 212 с.
6. Млавець Ю.Ю., Шаркаді М.М. Теорія ймовірностей і математична статистика (стислий конспект лекцій для студентів нематематичних спеціальностей). – Ужгород: ДВНЗ "УжНУ", 2015. – 48 с.
7. Найко Д.А. Шевчук О. Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. / Д.А. Найко, О.Ф. Шевчук – Вінниця: ВНАУ, 2020. – 382 с.
8. Стрелковська І.В., Соловська І.М. Ймовірнісний підхід в задачах позиціонування // IX Всеукраїнська мультидисциплінарна конференція студентів, аспірантів та молодих учених «Гуманітарний і інноваційний ракурс професійної майстерності: Пошуки молодих вчених»: матеріали конф., 12 травня 2023 р.: тези доп. – Одеса. Львів – Торунь: Liha-Pres , 2023. – С. 224-227. https://doi.org/10.36059/978-966-397-300-5-68

Допоміжна

9. Огірко О. І., Галайко Н. В. О-36 Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник / О. І. Огірко, Н. В. Галайко. – Львів: ЛьвДУВС, 2017. – 292 с.
10. Пушак Я. С., Лозовий Б. Л. Теорія імовірностей і елементи математичної статистики: навчальний посібник. Львів: УАД, 2006. – 428 с.
11. Стрелковська І.В., Золотухін Р.В., Григор'єва Т.І. Узагальнена модель оцінки показників функціонування низькошвидкісних мереж зв'язку автоматизованих систем управління. Інфокомунікаційні та комп'ютерні технології. – 2022. – № 1 (03). – С. 138-153.

Інформаційні ресурси

12. Жерновий Ю. В. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики для студентів нематематичних спеціальностей. Львів, 2009. 18 с. URL: http://zyurvas.narod.ru/Lekcyi_z_TIMS/zbirn_zadach.pdf.
13. Жерновий Ю.В. Теорія ймовірностей та математична статистика: тексти лекцій для студентів нематематичних спеціальностей. Львів, 2008. 101 с. URL: http://zyurvas.narod.ru/Lekcyi_z_TIMS/Lekcii_z_TIMS.pdf.
14. https://probability.knu.ua/tims/
15. https://www.ams.org/publications/journals/journalsframework/tpms

ЗМІСТ

Навчальне видання

Григор'єва Тетяна Ігорівна

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Методичні рекомендації для самостійної роботи
здобувачів фахової передвищої освіти
за спеціальністю 123 «Комп'ютерна інженерія»

Українською мовою